LA GENERALIZZAZIONE DEL CONCETTO DI GEOMETRIA

C.F. Manara

LA GENERALIZZAZIONE DEL CONCETTO DI GEOMETRIA

Carlo Felice MANARA

Università di Milano

Sarebbe facile osservare che la dissoluzione del quadro tradizionale della geometria, avvenuta in gran parte nel secolo XIX, rientra in una crisi molto più vasta che ha investito tutta la matematica e ha portato questa scienza al suo assetto attuale. Tuttavia non ci è possibile qui inquadrare la evoluzione della geometria nell'ambito molto più vasto della evoluzione dell'intero universo della matematica del secolo XIX; pertanto ci limiteremo ad un sommario esame del fenomeno storico, e ad un tentativo di analisi della dottrina, varia e composita, che esso ha generato.

Per parte nostra pensiamo che non ci si debba stupire per il fatto che la dissoluzione della geometria tradizionale abbia dato origine ad una grande quantità di capitoli della scienza matematica, che appaiono anche molto distanti tra loro; infatti, anche ad un esame frettoloso e sommario, la geometria tradizionale classica ci si presenta come un insieme di nozioni e di proposizioni che traggono la loro origine psicologica da esperienze e da estrapolazioni che hanno nature abbastanza diverse e distanti tra loro.

Senza volere approfondire l'argomento (che potrebbe forse portare ad interessanti conseguenze per la didattica), vorremmo ribadire che la nostra esperienza sul mondo che ci circonda è varia e composita; essa trae origine da sensazioni che afferiscono a sensi diversi ed a manipolazioni di varia natura sugli oggetti; pertanto, non ci pare molto strano il fatto che una dottrina che si prefigga di razionalizzare queste esperienze e queste manipolazioni, abbia delle radici intrecciate e ramificate.

Non può quindi stupire il fatto che il processo evolutivo ed innovativo sia avvenuto in modo intricato ed abbastanza tumultuoso; il che rende difficile la sua disamina esauriente. In particolare diciamo subito che l'analisi che tenteremo della evoluzione della geometria non potrà riprodurre esattamente nè la gerarchia logica delle innovazioni, nè la loro precisa successione cronologica: si tratterà solo di uno sforzo per cercare un inizio di sistemazione in una situazione che appare di sua natura molto complessa.

Per l'analisi che abbiamo in vista ci pare sia utile ricordare alcuni atteggiamenti che caratterizzano la geometria classica e che, in certo modo, ne forniscono la genesi psicologica e ne fondano gli sviluppi. A nostro avviso, si potrebbero identificare tre punti dell'atteggiamento classico, che a noi appaiono importanti perchè l'entrare in crisi di ognuno di loro ha dato origine ad un filone di ampliamento e di generalizzazione della idea di geometria: precisamente pensiamo che si possa ricordare in primo luogo l'accettazione del concetto di corpo rigido e di trasporto rigido come evidente ed intuitivo; in secondo luogo la accettazione acritica della estrapolazione, a distanza comunque grande, della validità delle esperienze da noi eseguite sui corpi che ci circondano, infine la accettazione acritica del concetto di "continuo" e delle sue presunte proprietà.

Le tracce di questi atteggiamenti si incrontrano ad ogni passo nella trattazione classica, perchè le nozioni che venivano allora considerate come "evidenti" ispirano la impostazione dei problemi, la loro soluzione, ed in generale tutta la struttura della teoria geometrica.

Ci pare chiaro infatti che la nozione di trasporto rigido sia alla base del concetto classico di uguaglianza delle figure geometriche.

In particolare ci pare chiaro che l'idea del movimento rigido sia alla base del III Postulato del I Libro degli Elementi di Euclide; e che l'idea del trasporto rigido e delle proprietà del continuo geometrico sia alla base, per esempio, delle proposizioni I e II dello stesso I Libro, laddove è data come eseguibile e dotata di senso la operazione che consiste nella costruzione delle intersezioni di due circonferenze o di una circonferenza e di una retta per il suo centro.

Analogamente la concezione che considera la continuità come una proprietà fondamentale degli oggetti della geometria appare chiaramente fondata su una facile e comprensibile estrapolazione della esperienza sensibile; essa appare giustificata dalle concezioni della fisica del tempo ed anche dei secoli successivi ad Euclide, concezioni che accettavano il concetto di "materia continua" come un dato elementare e primario della esperienza, dato che pertanto, in quell'ordine di idee, non aveva bisogno di ulteriori precisazioni.

E del resto occorre ricordare che queste erano le idee che fondavano le concezioni della fisica fino alla fine del secolo XVIII e forse anche oltre.

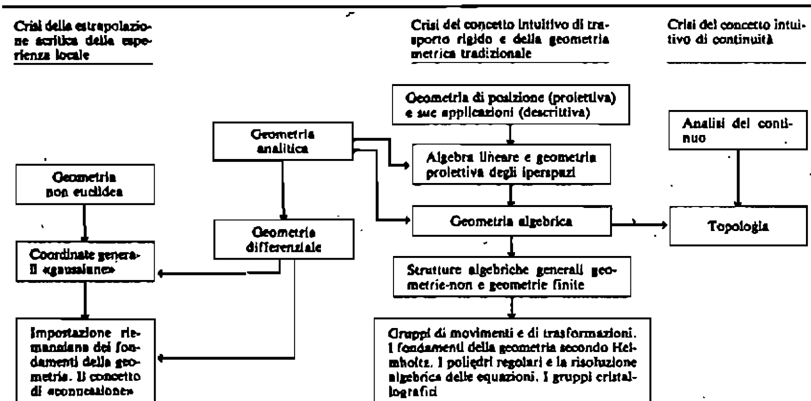
Infine vorremmo dire che la estrapolazione, ad una distanza qualunque della validità dei risultati di una esperienza eseguita in una regione limitata dello spazio è alla base dell'enunciato del V Postulato di Euclide.

Ci pare di poter dire che l'entrare in crisi di ognuno dei punti che abbiamo elencato poco fa, ha portato in modo quasi naturale ad un cambiamento della struttura della geometria e ha dato origine ad un ampliamento dell'orizzonte di questa scienza, con accrescimento dei contenuti e, potenzialmente, dei metodi. In questa luce si potrebbe anche dire che la nascita e la maturazione della geometria non euclidea è soltanto uno degli episodi e dei momenti nei quali si è realizzata la rottura del quadro della geometria classica e la sistemazione più moderna di questa scienza; essa ha avuto un indubbio valore "scatenante" e perciò forse oggi ancora attrae molte attenzioni; ma forse il quadro è molto più complesso di quanto non appaia a chi guardi prevalentemente agli attori che sono al proscenio.

Nelle pagine seguenti la nostra esposizione seguirà in linea di massima l'ordine dei punti che abbiamo elencato, e precisamente cercherà di analizzare la progressiva estensione del concetto di geometria al cambiare ed al trasformarsi delle certezze sulle quali la geometria classica fondava implicitamente il proprio edificio ed i propri metodi e quindi la sua stessa esistenza.

Per svolgere il nostro discorso ci pare molto opportuno fondarci sulle idee direttive esposte da F. Klein nella sua celebre dissertazione, che viene attualmente richiamata con la espressione "Programma di Erlangen". Pensiamo che la potenza unificante della impostazione Kleiniana autorizzi il mancato rispetto del rigoroso ordine cronologico; avvalorando così la tesi secondo la quale frequentemente, nello sviluppo della scienza, le idee veramente profonde ed unificanti si presentano a conclusione di processi spesso lunghi, di sviluppi tumultuosi e di evoluzioni tortuose.

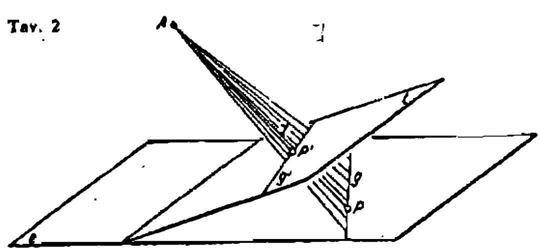
AMPLIAMENTI E GENERALIZZAZIONI DEL CONCETTO CLASSICO DI «GEOMETRIA»



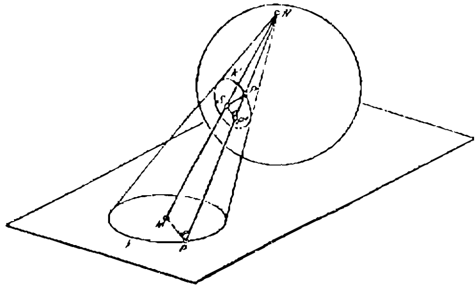
Tav. 1

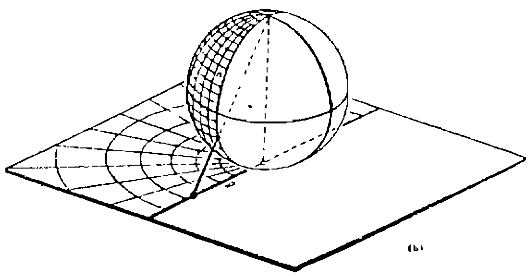
Seguendo lo schema esposto, vorremmo anzitutto analizzare gli sviluppi conseguenti all'ampliamento del gruppo delle trasformazioni geometriche e quindi alla crisi della geometria metrica tradizionale, fondata sulla accettazione acritica del concetto di trasporto rigido e di corpo rigido. Ci pare che il primo passo in questa direzione sia stato fatto con la invenzione della geometria proiettiva, e quindi con la accettazione del fatto che le figure geometriche possano essere trasformate anche per proiezione e non solo con movimenti rigidi o con similitudini che lasciano invariati gli angoli. E' inutile ricordare la massa di risultati nuovi che sono venuti così ad accrescere il patrimonio della geometria; ma vale la pena di osservare che in questo modo anche i risultati già noti sono stati guardati in una luce del tutto nuova; tale è il caso delle proprietà delle coniche, le quali erano classicamente definite come curve ottenute secondo il cono (o al limite il cilindro) rotondo, ed in questa nuova concezione sono viste come curve ottenute per proiezione della circonferenza. E vorremmo ricordare che, nello spirito del metodo geniale introdotto da V. Poncelet, i nuovi risultati sono stati ottenuti proprio con una nuova "lettura" dei vecchi, lettura motivata dalla ricerca delle proprietà invarianti delle figure di fronte alle trasformazioni proiettive.

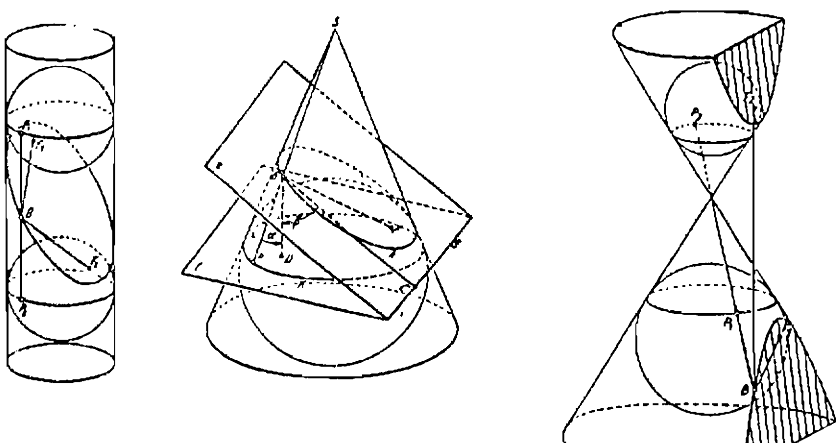
Tav. 2



Tav. 3

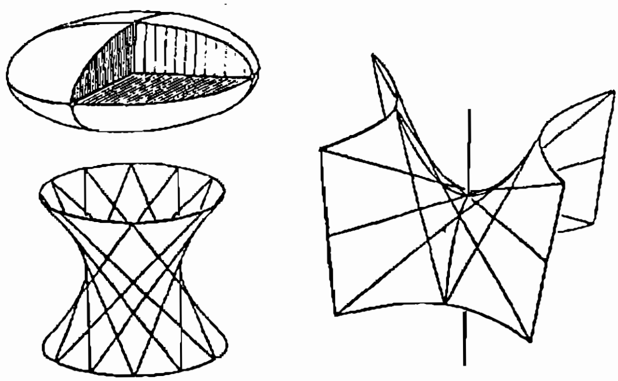




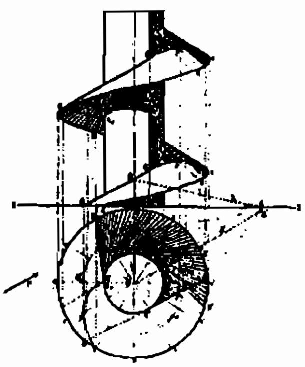


Tav. 4

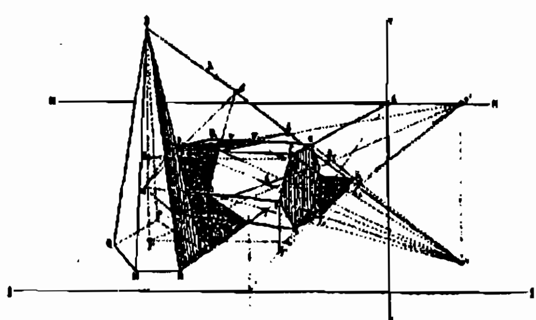
In questo ordine di idee si dovrebbero anzitutto ricordare le applicazioni della geometria proiettiva alla rappresentazione degli enti geometrici dello spazio ordinario, che hanno trovato la loro realizzazione nei vari metodi della geometria descrittiva.



Tav. 5



Tav. 5



Tav. 6

Ma gli sviluppi più importanti - a nostro parere - lungo questa linea sono quelli che hanno portato, anche sotto lo stimolo della problematica collegata con la geometria analitica, all'algebra lineare, alla geometria proiettiva degli iperspazi, alle varie geometrie-non. A questo proposito ricordiamo come D. Hilbert, nella sua fondamentale opera dedicata ai fondamenti della geometria, abbia collegato le varie "geometrie-non" alle proprietà formali del calcolo dei segmenti, aprendo così la strada al collegamento tra lo studio delle strutture algebriche e le problematiche della geometria.

Ricordiamo ancora che l'adozione dei metodi della geometria analitica, il progresso dell'algebra e in particolare l'ampiamento degli insiemi numerici tradizionali hanno portato alla geometria algebrica, nel senso classico. Questa dottrina infatti può essere considerata come uno dei filoni di ricerca più interessanti tra quelli che trovano la loro origine nei metodi della geometria analitica e nell'ampliamento dei gruppi di trasformazioni delle figure.

Invero è facile osservare che buona parte delle relazioni geometriche che traducono le nozioni e i problemi della geometria classica si esprimono con relazioni algebriche; e moltissimi luoghi geometrici che furono oggetto di studio per la geometria classica si rappresentano con equazioni algebriche nelle coordinate cartesiane.

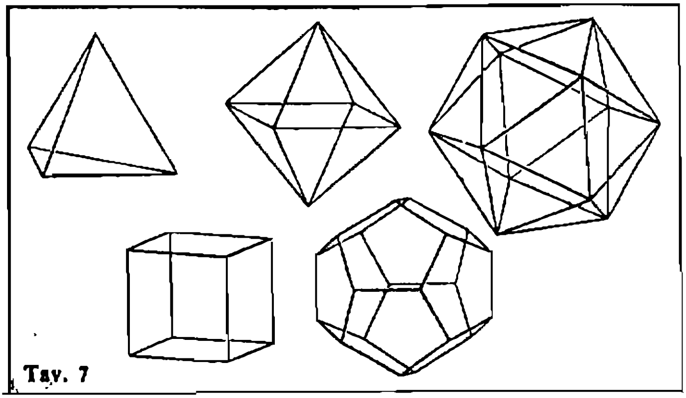
Si spiega così come la teoria delle funzioni algebriche, cioè di quelle funzioni della variabile complessa che sono definite implicitamente da equazioni algebriche sia presto diventata un capitolo importante della analisi complessa. A loro volta questi studi davano occasione ad altre ricerche di stile prettamente geometrico, perchè le proprietà di una funzione complessa di variabile complessa non possono essere rappresentate nel modo intuitivo che era abituale alla geometria classica. Nello studio di queste funzioni vengono coinvolte delle proprietà di topologia delle varietà a due dimensioni, e precisamente di certe superfici che furono introdotte da B. Riemann e che in suo onore e ricordo vengono chiamate abitualmente "riemmaniane" delle funzioni.

Altri studi, collegati con questi, davano origine alle teorie riguardanti funzioni trascendenti "nuove" rispetto a quelle riconosciute da tempo, come le funzioni ellittiche e le funzioni theta; funzioni che permettono la parametrizzazione di curve algebriche oppure la soluzione di problemi di inversione e di altri.

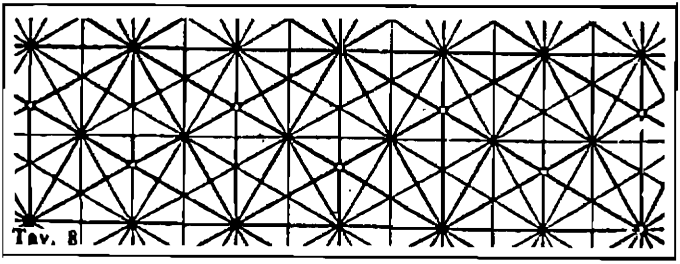
Sempre nello stesso ordine di idee, vorremmo ricordare anche tutta la grande quantità di ricerche riguardanti le strutture algebriche generali; argomenti che spesso vengono presentati con linguaggio geometrico, proprio perchè affondano le loro lontane radici nella geometria.

Caso abbastanza tipico di ricerche cosiffatte ci sembra quello costituito dalle cosiddette "geometrie-finite" e quello delle geometrie costruite su corpi numerici diversi dal campo reale o dal campo complesso, che ne costituisce la più naturale estensione.

Vorremmo ricordare infine che anche gli oggetti noti e studiati fino dall'antichità, come per esempio i poliedri regolari, possono essere visti sotto una luce del tutto nuova quando si adotti la visione della geometria che è presentata dalle idee di Klein. Vorremmo per esempio ricordare che la impostazione che porta a concentrare l'attenzione più sulle operazioni che sulle cose in sé può condurre lontano, per esempio al classico collegamento tra i gruppi dei poliedri regolari e le questioni riguardanti la risoluzione algebrica delle equazioni, oppure alla analisi dei gruppi cristallografici del piano e dello spazio ed ai corrispondenti problemi di "pavimentazione".



Tav. 7



Tav. 8

Abbiamo detto degli ampliamenti del concetto di geometria che in certo senso traggono la loro origine dall'ampliamento del gruppo di trasformazioni a cui pensiamo di poter sottoporre le figure e quindi al conseguente cambiamento delle proprietà prese in considerazione come invarianti per quel gruppo.

Tuttavia la crisi più clamorosa, e storicamente più importante, delle concezioni classiche, è certo quella che ha la sua origine nella critica della ingenua estendibilità a distanza delle esperienze locali; e potremmo identificare in questa crisi, più o meno esplicitamente avvertita, la genesi della geometria non euclidea. Si può osservare infatti che il Postulato euclideo della parallela non riguarda delle costruzioni, non afferma la possibilità di trasportare delle figure o di confrontare delle grandezze, ma si limita ad affermare la esistenza della intersezione di due rette complanari quando certe misure di angoli, eseguite in un ambito che è alla portata dell'osservatore, danno un certo risultato. Si tratta quindi di una estrapolazione del significato e della portata della esperienza locale e quindi, a posteriori, appare ben naturale che esso sia stato fatto oggetto di critiche.

Può essere interessante guardare sotto questa luce la dimostrazione del V postulato euclideo data nel XVII secolo da J. Wallis; come è noto, questa dimostrazione si fonda sulla accettazione del Postulato della esistenza di una figura simile ad una figura data (in particolare ad un triangolo dato) e comunque grande. Appare chiaro - a nostro parere - come la enunciazione di un postulato cosìffatto si fondi su un atteggiamento psicologico che accetta come evidente la uniformità della esperienza geometrica e la liceità della sua estrapolazione, da un'ambito accessibile alla nostra esperienza, a distanze comunque grandi.

Come è noto, la crisi delle certezze, presunte "intuitive", che stava alla base della formulazione del V Postulato, ha avuto la sua manifestazione più clamorosa nella nascita delle geometrie non euclidee; ma le sue conseguenze hanno avuto una portata molto più vasta soprattutto grazie all'apporto dei procedimenti della geometria differenziale, intesa come insieme di metodi che utilizzano l'analisi matematica ed i suoi strumenti per studiare gli oggetti della geometria.

Si potrebbe dire che questi sviluppi hanno il loro punto di partenza nella generalizzazione del concetto di coordinate, e trovano il loro sbocco principale nella impostazione rivoluzionaria che B. Riemann diede dei fondamenti della geometria; e non va dimenticato che proprio con i metodi della geometria differenziale E. Beltrami diede un modello di geometria non euclidea di una varietà a due dimensioni cioè diede un contributo determinante alla questione della compatibilità logica dei sistemi di postulati che fondano la geometria non euclidea iperbolica.

Dalla impostazione di Riemann discende tutta la serie di ricerche che hanno condotto alla moderna geometria come scienza che descrive in modo ragionevole e coerente le nostre esperienze sugli oggetti che ci circondano e che noi manipoliamo.

Sempre in questa linea di pensiero acquista importanza fondamentale il concetto di "connessione" ; questo potrebbe essere descritto in modo approssimato e sommario dicendo che la geometria, nel suo complesso, viene costruita "saldando" insieme varie faccette che rappresentano le esperienze locali dei vari osservatori.

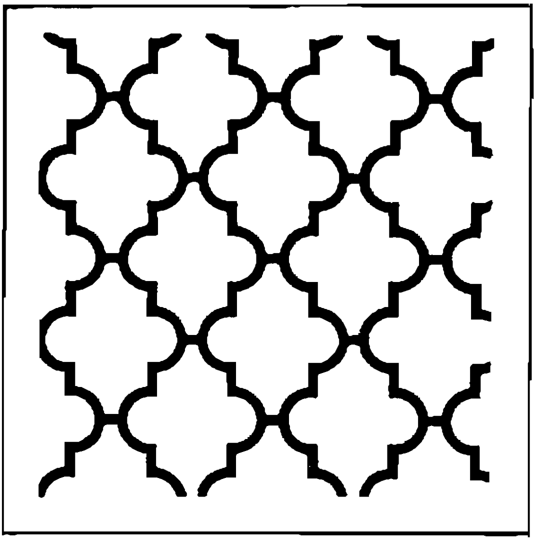
Appare quindi del tutto naturale il fatto che questo insieme di concetti e di metodi abbia fornito gli strumenti per la formulazione della teoria della Relatività generale. Possiamo intravvedere qui un interessante parallelismo tra questa visione della geometria e le concezioni moderne della fisica; e possiamo aggiungere che l'insieme degli strumenti del calcolo tensoriale inventati in origine per gli scopi della geometria, risponde in modo egregio a quella esigenza di ricerca della "obiettività" delle osservazioni e delle leggi che è uno degli scopi fondamentali della fisica.

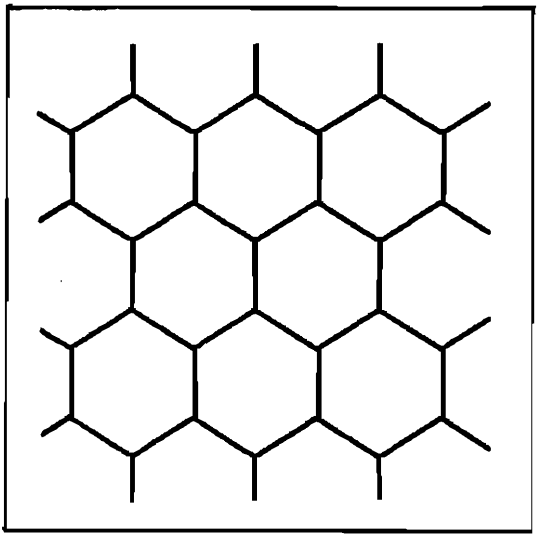
<u>Abbiamo accennato di sfuggita alla geometria analitica</u>: vorremmo ritornare qui sull'argomento ricordando gli apporti che questo insieme di metodi ha fornito alla geometria. Ma vorremmo pure ricordare che, in senso per così dire opposto, anche la geometria ha fornito una grande quantità di stimoli e di problemi all'algebra e all'analisi matematica. In vero ci è già capitato di dire che il concetto di continuo geometrico è stato accettato dalla geometria come intuitivo ed evidente per secoli, ma possiamo aggiungere che questo concetto è risultato fondamentale per la costruzione del calcolo infinitesimale e che la fondazione rigorosa di questa dottrina matematica passa sostanzialmente attraverso la precisazione dell'idea di continuità.

La precisazione del concetto del continuo geometrico è avvenuta come è noto, attraverso la formulazione, in vari modi e con vari atteggiamenti, di opportuni postulati che hanno permesso di esprimere in modo rigoroso questa proprietà delle figure della geometria classica; essa ha condotto i matematici alla rimeditazione di un insieme di questioni di logica che sono strettamente collegate con la teoria degli insiemi e con la problematica dei fondamenti della matematica.

Nell'ambito dell'opera di precisazione dei concetti prima accettati acriticamente perchè ritenuti "evidenti", non vorremmo dimenticare l'apporto di G. Peano con la sua celebre "trovata" critica della "curva" che riempie un quadrato. Risultato che ha contribuito a stimolare un insieme molto fecondo di precisazioni e di formulazioni rigorose.

Vorremmo dire in fine che in stretto collegamento con le questioni riguardanti l'analisi del concetto di continuità è anche la genesi di una dottrina che è oggi considerata una delle colonne portanti dell'edificio matematico: la topologia. Infatti uno degli aspetti iniziali di questa branca della matematica era quello di "geometria delle figure deformabili", ovvero di geometria che ha come gruppo fondamentale quello delle trasformazioni biunivoche e bicontinue; e in questo ordine di idee essa si presentava come un ulteriore ampliamento delle geometrie conosciute, e quindi come la ricerca di proprietà invarianti delle figure che sono per così dire ad un livello più profondo di quello abituale, perchè riconoscono la loro genesi psicologica in esperienze estremamente comuni ed elementari.





Abbiamo cercato di presentare il grande fenomeno storico che si è verificato con la dissoluzione del concetto classico di geometria guardando a quelli che ci sembrano i punti critici fondamentali; punti che - a nostro parere - mettono in evidenza il venir meno di certe certezze e di certi concetti, accettati per secoli come "evidenti" ed "intuitivi". La tav. 1, vorrebbe aiutare a seguire il nostro pensiero ed a introdurre un certo ordine (ovviamente dal nostro punto di vista) in una situazione che a prima vista si presenta come multiforme e complessa.

Pensiamo di poter affermare che, come sempre, anche nel caso della geometria ogni crisi dopo un certo sconvolgimento iniziale, è seguita da un periodo di riflessione e di assestamento che conduce ad una assimilazione vitale della crisi e diventa poi punto di partenza per chiarimenti, nuove sistemazioni e nuove scoperte.

Non intendiamo insistere in questo argomento, che tuttavia meriterebbe molta attenzione; vogliamo soltanto ricordare che a nostro parere la geometria, nell'ambito della matematica, mette in essere l'apporto ineliminabile che la fantasia dà ad ogni attività razionale dell'uomo; attività che non può essere soltanto formalmente deduttiva, ma che deve essere necessariamente di creazione e di invenzione.

A nostro parere, in questo campo, ci pare essenziale l'apporto che la rappresentazione fantastica del mondo e delle nostre esperienze può dare alla conoscenza razionale e scientifica della realtà; e di conseguenza ci pare che la geometria nei suoi vari aspetti rimanga uno dei capitoli fondamentali della matematica.-

Bernhard Riemann (Breselenz 1826 - Selasca 1866)